Tomasz LEWIŃSKI[1]

DRGANIA HARMONICZNE RAM PŁASKICH. PROPOZYCJA NOWEGO UJĘCIA DYDAKTYCZNEGO

1. Wprowadzenie

Wykład statyki ram płaskich znajduje swoją naturalną kontynuację w wykładach dotyczących deformacji ram poddanych dużym siłom osiowym a następnie – drgań harmonicznych. Zasada prac wirtualnych zezwala na jednolite ujęcie tych zagadnień, bez wprowadzenia jakichkolwiek przybliżeń spoza teorii prętów, w zastosowaniu do ram płaskich o dowolnym kształcie, przy założeniu lub bez założenia podłużnej odkształcalności prętów. Opis deformacji układów prętowych, w tym ram płaskich, składa się z trzech grup równań [4, 6-9]:
i) równań równowagi wiążących siły wewnętrzne przywęzłowe z obciążeniami zewnętrznymi; w zadaniach drgań harmonicznych równania te są równaniami równowagi dynamicznej a wszystkie wielkości mają sens amplitud;
ii) związków konstytutywnych wiążących siły wewnętrzne z przemieszczeniami lub kątami obrotu końców prętów;
iii) związków zgodności przemieszczeń i kątów obrotu końców prętów z niezależnymi uogólnionymi przemieszczeniami charakteryzującymi deformacje zgodne z przyjętymi więzami, w tym z więzami nieściśliwości.

W zadaniach statyki liniowej i statyki w ujęciu zlinearyzowanym deformacji ram z udziałem dużych sił osiowych można ponadto wprowadzić pojęcie odkształceń, por. [4, 6-9].

Rozbicie sformułowania zadań statyki i drgań harmonicznych układów prętowych na powyższe trzy grupy równań ma zasadnicze walory poznawcze. Zwróćmy uwagę, że równania (i), (iii) są niezależne od cech materiałowych. Ponadto operuje się pojęciami, które pozostają w widocznej analogii do pojęć mechaniki ciał odkształcalnych: naprężeń, odkształceń i przemieszczeń, co wprowadza element ważnej syntezy do dydaktyki grupy przedmiotów dotyczących mechaniki konstrukcji budowlanych. Tym samym otwiera się drogę dalszym wykładom dotyczącym zagadnień plastyczności i optymalnego projektowania układów prętowych.

Celem tego referatu jest przedstawienie takiego ujęcia drgań harmonicznych ram płaskich, które jest właśnie naturalną kontynuacją wykładów dotyczących statyki. Ujęcie takie można znaleźć w monografii Nowackiego [10]. Zauważmy jednak, że nie podano tam ogólnej metody tworzenia równań równowagi dynamicznej ram nieortogonalnych z prętów

[1] Dr hab. inż., Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej

nieściśliwych lub takich, w których tylko niektóre pręty są nieściśliwe. Używane przez Nowackiego pojęcie nieściśliwości oznacza pominięcie odkształceń podłużnych. W ujęciu przedstawionym poniżej nie wyróżnia się ram ortogonalnych, gdyż punktem wyjścia jest równanie prac wirtualnych obowiązujące w każdym wypadku.

Nowsze podręczniki dynamiki budowli poprawnie uczą jak rozwiązywać zadania drgań harmonicznych dowolnych układów prętowych. Proponują jednak ujęcie przemieszczeniowe, którego bezpośrednim celem jest konstrukcja macierzy sztywności, por. p.5.4.3. w artykule Langera [5]. W praktyce dydaktycznej nauczania mechaniki konstrukcji na poziomie inżynierskim nie jest jednak możliwe nauczanie takim trybem, gdyż tworzenie macierzy transformacji $\mathbf{A}_K$ dla każdego pręta K a następnie agregacja są niewykonalne bez korzystania ze specjalnego oprogramowania. Z tego względu w najnowszych podręcznikach pragmatycznie zredagowanych , por. Chmielewski i Zembaty [1], Chopra[2], zagadnienie drgań układów o ciągłym rozkładzie masy omówiono w ścisły sposób tylko w zakresie drgań jednego pręta. Sugeruje się, że zagadnienie drgań harmonicznych ram płaskich powinno być rozważane w sposób przybliżony metodą elementów skończonych, por. Gomuliński i Witkowski [3]. Niniejszy referat jest napisany w innym duchu. Celem jest przekonanie Czytelnika, że do analizy drgań harmonicznych ram złożonych nawet z kilkunastu prętów metoda MES nie jest potrzebna. Przedstawione poniżej ujęcie zagadnienia może być bardzo łatwo wdrożone do dydaktyki. Studenci samodzielnie programują zadania dotyczące ram z prętów ściśliwych i nieściśliwych układając równania (iii). Postać równań (i, ii) jest jednakowa w każdym zadaniu i nie wymaga specjalnego wysiłku. Studenci sami programują równania (i-iii) w odniesieniu do ram nieortogonalnych. Mogą też łatwo badać wpływ więzów nieściśliwości wybranych prętów na wartości częstości drgań własnych. Jeszcze łatwiejsza jest analiza drgań rusztów o węzłach sztywnych, gdyż nie występuje problem planów przemieszczeń generowany przez więzy nieściśliwości. Omówiona tutaj metoda zezwala także na badanie drgań harmonicznych ram przestrzennych, por.[7].

W przedstawionym niżej ujęciu wprowadzamy dwie numeracje: niezależnych uogólnionych przemieszczeń (j=1,...,s) oraz prętów (K=1,...,e; L=e+1,...,n lub K=1 ,..., n); tak dobrane indeksy od razu pozwalają na czytanie formuł. Każdy pręt jest ukierunkowany przez układ lokalny (x, z). Nie wprowadzamy natomiast numeracji węzłów; jest to nie tylko zbędne, lecz byłby to błąd metodyczny. Wyprowadzenie podane poniżej jest najkrótsze z możliwych; w celu osiągnięcia celów dydaktycznych, formuły te można wyprowadzać też innymi sposobami, dostosowanymi do poziomu merytorycznego słuchaczy.

2. Drgania ram z prętów niewydłużalnych

Rozpatrujemy ramę płaską poddaną wymuszeniu harmonicznemu o częstości θ w postaci obciążeń poprzecznych do prętów o amplitudzie $q_K(\xi)$, gdzie K jest numerem pręta, $\xi = x / l_K$, l_K jest długością K-tego pręta, x jest współrzędną lokalną wzdłuż osi obojętnej. Wprowadzamy współczynniki $\lambda_K = l_K \left(\mu_K \theta^2 / EJ_K\right)^{1/4}$, gdzie μ_K jest masą jednostki długości K-tego pręta, EJ_K jego sztywnością na zginanie. Wzdłuż prętów działają siły bezwładności o amplitudach $U_K = \theta^2 \mu_K l_K u_K$, gdzie u_K jest amplitudą przemieszczenia w kierunku osi x. Amplituda zmiany krzywizny jest określona za pomocą amplitudy ugięcia $w_K(\xi)$ wzorem:

$\kappa_K = \kappa[w_K]$, gdzie $\kappa[f] = -d^2 f / dx^2$ lub $\kappa[f] = -\ddot{f}/l^2$, $(\dot{\ }) = d(\ )/d\xi$. Amplitudy momentów wynoszą: $M_K = EJ_K \kappa[w_K]$.

Równanie ruchu ramy, zapisane w amplitudach, przyjmuje postać równania wariacyjnego

$$\sum_K \int_0^{l_K} M_K \kappa[\overline{w}_K] dx = \sum_K \int_0^{l_K} \theta^2 \mu_K w_K \overline{w}_K dx + \sum_K U_K \overline{u}_K + \sum_K \int_0^{l_K} q_K \overline{w}_K dx \quad \text{dla wszystkich } \overline{u}_K, \overline{w}_K \tag{1}$$

kinematycznie dopuszczalnych,

gdzie suma rozciąga się po K= 1,...,e, e jest liczba prętów. Niech $\overline{u}_K, \overline{w}_K$ będą wywoływane wirtualnymi obciążeniami skupionymi w węzłach. Wówczas

$$\overline{w}_K(\xi) = {}^*\overline{w}_K {}^*\rho(\lambda_K, \xi) + \overline{w}_K{}^* \rho^*(\lambda_K, \xi) + l_K {}^*\overline{\varphi}_K {}^*\omega(\lambda_K, \xi) + l_K \overline{\varphi}_K{}^* \omega^*(\lambda_K, \xi) \tag{2}$$

Gwiazdki po lewej stronie wskazują na lewy koniec pręta a gwiazdki po prawej stronie – na prawy koniec. Występujące powyżej funkcje ${}^*\rho(\lambda_K,.),...,\omega^*(\lambda_K,.)$ spełniają znane równanie: $\ddot{\ddot{f}} - (\lambda_K)^4 f = 0$ i odpowiednie warunki brzegowe. Jawna postać tych funkcji jest dobrze znana; nie będzie tutaj przytaczana. Podstawienie (2) do (1) daje równanie ruchu dotyczące amplitud, w postaci algebraicznej, nazywane niekiedy równaniem równowagi dynamicznej

$$\sum_K \left({}^*M_K {}^*\overline{\varphi}_K + M_K{}^* \overline{\varphi}_K{}^* + {}^*T_K {}^*\overline{w}_K + T_K{}^* \overline{w}_K{}^* - U_K \overline{u}_K \right) = \overline{L}_z \tag{3}$$

gdzie $\overline{L}_z$ jest pracą wirtualną obciążeń przęsłowych i skupionych w węzłach. Dokładną definicję podano w raporcie [7]. Wielkości ${}^*M_K,...,T_K{}^*$ są określone za pomocą symetrycznej formy dwuliniowej:

$$[f, g]_K = \int_0^1 \left(\ddot{f}\, \ddot{g} - (\lambda_K)^4 f\, g \right) d\xi \tag{4}$$

następująco

$${}^*M_K = \frac{EJ_K}{(l_K)^2} \left[w_K, {}^*\omega(\lambda_K,.) \right]_K \quad , \quad {}^*T_K = \frac{EJ_K}{(l_K)^3} \left[w_K, {}^*\rho(\lambda_K,.) \right]_K \tag{5}$$

natomiast definicje wielkości $M_K{}^*, T_K{}^*$ są analogiczne.

Przez $\overline{q}_1, \overline{q}_2, \overline{q}_3, ..., \overline{q}_s$ oznaczamy wirtualne kąty obrotu węzłów oraz niezależne przechyły ramy (wybrane kąty obrotu cięciw), zgodnie z przyjętymi więzami nieściśliwości. Wirtualne przemieszczenia i kąty obrotu końców K-pręta zależą liniowo od tych wielkości

$${}^*\overline{\varphi}_K = \sum_{j=1}^{s} {}^*B_{Kj} \overline{q}_j , \quad {}^*\overline{w}_K = \sum_{j=1}^{s} {}^*A_{Kj} \overline{q}_j , \quad \overline{u}_K = \sum_{j=1}^{s} C_{Kj} \overline{q}_j \quad ; \tag{6}$$

formuły dotyczące prawego końca pręta są analogiczne. Współczynniki ${}^*B_{Kj},...,C_{Kj}$ można generować na podstawie danych do typowego programu MES; odpowiedni program opracował dr K.Hetmański. W mniej złożonych zadaniach współczynniki te łatwo tworzyć procedurą *genmatrix* systemu MAPLE, na podstawie wczytanej do programu postaci układu równań (6).

Podstawienie rozkładów (6) do równania równowagi dynamicznej (3) i wykorzystanie niezależności wielkości $\overline{q}_1, \overline{q}_2, \overline{q}_3, ..., \overline{q}_s$ (należy brać kolejne wektory bazy w R^s) prowadzi do *s* równań równowagi dynamicznej postaci

$$\sum_K \left({}^*M_K {}^*B_{Kj} + M_K{}^* B_{Kj}{}^* + {}^*T_K {}^*A_{Kj} + T_K{}^* A_{Kj}{}^* - U_K C_{Kj} \right) = Q_j , \qquad j=1,..., s \qquad (7)$$

Q_j jest zastępczym obciążeniem; formułę analityczną na Q_j podano w [7]. Podkreślmy, że powyższy układ równań algebraicznych jest informacją otrzymaną z równania wariacyjnego (1) przy ograniczeniu klasy przemieszczeń wirtualnych do takich, które są generowane przez obciążenia skupione w węzłach. Równanie (7) można łatwo zapisać w notacji macierzowej, co jednak zaciemnia jego sens.

Równania równowagi (7) uzupełnimy o związki konstytutywne. W tym celu do formuł (5) wstawiamy postać ugięcia *K*-tego pręta

$$w_K(\xi) = {}^*w_K {}^*\rho(\lambda_K, \xi) + w_K{}^* \ \rho^*(\lambda_K, \xi) + l_K{}^* \varphi_K {}^*\omega(\lambda_K, \xi) + l_K \varphi_K{}^* \omega^*(\lambda_K, \xi) + w^0{}_K(\xi) \qquad (8)$$

gdzie $w^0{}_K(\xi)$ oznacza ugięcie wywołane obciążeniem przęsłowym, mierzone w schemacie *geometrycznie wyznaczalnym* (czyli takim, w którym wymusza się **q**=**0**). Ugięcie to spełnia warunki utwierdzenia na obu końcach pręta. Zatem prawa strona tożsamości

$$\left[w_K{}^0 , f \right]_K = -\left(\dddot{f} \, w_K{}^0 \right)\Big|_0^1 + \left(\ddot{f} \, \dot{w}_K^0 \right)\Big|_0^1 \qquad (9)$$

zeruje się. Oznacza to, że związki konstytutywne będą jednorodne; obciążenie przęsłowe nie ma wpływu na ich postać:

$$\begin{aligned} {}^*M_K &= \frac{EJ_K}{l_K} \left[\alpha_K {}^*\varphi_K + \beta_K \varphi_K^* + \vartheta_K ({}^*w_K / l_K) - \delta_K (w_K{}^* / l_K) \right] \\ {}^*T_K &= \frac{EJ_K}{(l_K)^2} \left[\vartheta_K {}^*\varphi_K + \delta_K \varphi_K^* + \gamma_K ({}^*w_K / l_K) - \varepsilon_K (w_K{}^* / l_K) \right] \end{aligned} \qquad (10)$$

Formuły na wielkości dotyczące prawego końca są analogiczne. Na podstawie (5) jest $\alpha_K = \left[{}^*\omega, {}^*\omega \right]_K$, ale wobec tożsamości (9), prawdziwej dla $f = w_K^0 = {}^*\omega$, mamy: $\alpha_K = -{}^*\ddot{\omega}(\lambda_K, 0)$. W taki sposób pojawia się funkcja $\alpha(.)$ taka, że $\alpha_K = \alpha(\lambda_K)$. Analogicznie definiujemy wszystkie współczynniki występujące w (10)- jako wartości funkcji: $\beta(\lambda_K), \vartheta(\lambda_K), \delta(\lambda_K), \varepsilon(\lambda_K), \gamma(\lambda_K)$; funkcje te oznaczono tutaj tak jak w znanej książce Błaszkowiaka i Kączkowskiego; nie będziemy więc podawali ich definicji.

Zdefiniujmy macierze diagonalne o wymiarach $e \times e$

$$\mathbf{D}_\eta = diag\left\{\frac{EJ_K}{(l_K)^m}\eta_K\right\}, \qquad \eta=\alpha,\beta,...,\varepsilon\,; \qquad \mathbf{D}_u = diag\left\{\frac{EJ_K}{(l_K)^3}(\lambda_K)^4\right\} \tag{11}$$

gdzie m=1, gdy $\eta=\alpha,\beta$; m=2, gdy $\eta=\vartheta,\delta$; m=3, gdy $\eta=\gamma,\varepsilon$. Zdefiniujmy macierze jednokolumnowe ${}^*\boldsymbol{\varphi} = col\left({}^*\varphi_1,...,{}^*\varphi_e\right)$, ${}^*\mathbf{w} = col\left({}^*w_1,...,{}^*w_e\right)$, $\mathbf{u} = col(u_1,...,u_e)$; macierze dotyczące prawego końca tworzymy analogicznie. Podobnie definiujemy kolumny sił wewnętrznych ${}^*\mathbf{M}$,…, $\mathbf{T}^*$, $\mathbf{U}$. Związki konstytutywne (10) zapisujemy w postaci

$$\begin{aligned}
&{}^*\mathbf{M} = \mathbf{D}_\alpha{}^*\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{D}_\beta\boldsymbol{\varphi}^* + \mathbf{D}_\vartheta{}^*\mathbf{w} - \mathbf{D}_\delta\mathbf{w}^* \qquad && \mathbf{M}^* = \mathbf{D}_\beta{}^*\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{D}_\alpha\boldsymbol{\varphi}^* + \mathbf{D}_\delta{}^*\mathbf{w} - \mathbf{D}_\vartheta\mathbf{w}^* \\
&{}^*\mathbf{T} = \mathbf{D}_\vartheta{}^*\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{D}_\delta\boldsymbol{\varphi}^* + \mathbf{D}_\gamma{}^*\mathbf{w} - \mathbf{D}_\varepsilon\mathbf{w}^* && \mathbf{T}^* = -\mathbf{D}_\delta{}^*\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{D}_\vartheta\boldsymbol{\varphi}^* - \mathbf{D}_\varepsilon{}^*\mathbf{w} + \mathbf{D}_\gamma\mathbf{w}^*\,, \\
&\mathbf{U} = \mathbf{D}_u\mathbf{u}\;.
\end{aligned} \tag{12}$$

Siły wewnętrzne można wyrazić za pomocą niewiadomych $(q_1,...,q_s) = \mathbf{q}$, po wykorzystaniu związków (6) prawdziwych także w odniesieniu do wielkości szukanych. Podstawienie tych związków do równań równowagi dynamicznej (7) daje układ równań **Kq**=**Q** z macierzą

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_\kappa + \mathbf{K}_U\;,$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_\kappa = {}&{}^*\mathbf{B}^T\left(\mathbf{D}_\alpha{}^*\mathbf{B} + \mathbf{D}_\beta\mathbf{B}^* + \mathbf{D}_\vartheta{}^*\mathbf{A} - \mathbf{D}_\delta\mathbf{A}^*\right) + \mathbf{B}^{*T}\left(\mathbf{D}_\beta{}^*\mathbf{B} + \mathbf{D}_\alpha\mathbf{B}^* + \mathbf{D}_\delta{}^*\mathbf{A} - \mathbf{D}_\vartheta\mathbf{A}^*\right) + \\
&+{}^*\mathbf{A}^T\left(\mathbf{D}_\vartheta{}^*\mathbf{B} + \mathbf{D}_\delta\mathbf{B}^* + \mathbf{D}_\gamma{}^*\mathbf{A} - \mathbf{D}_\varepsilon\mathbf{A}^*\right) + \mathbf{A}^{*T}\left(-\mathbf{D}_\delta{}^*\mathbf{B} - \mathbf{D}_\vartheta\mathbf{B}^* - \mathbf{D}_\varepsilon{}^*\mathbf{A} + \mathbf{D}_\gamma\mathbf{A}^*\right)\,, \\
\mathbf{K}_U = {}&-\mathbf{C}^T\mathbf{D}_u\mathbf{C}\;.
\end{aligned} \tag{13}$$

Składowe macierzy sztywności zależą od częstości wymuszenia θ. W zadaniach poszukiwania częstości drgań własnych poszukuje się jeden z parametrów bezwymiarowych λ_K, np. λ_1.

3. Drgania ram, w których część prętów jest niewydłużalna

Przyjmujemy, że pręty o numerach L=e+1, ... , n, ulegające odkształceniom podłużnym, o sztywnościach na wydłużenie EA_L, są poddane obciążeniom poprzecznemu, jak w p.2 oraz podłużnemu, którego amplituda ma intensywność $p_L(\xi)$, $\xi = x/l_L$. Wprowadzamy bezwymiarowe charakterystyki $\alpha_L = l_L\theta(\mu_L/EA_L)^{1/2}$. Amplituda odkształcenia podłużnego wynosi $\varepsilon_L = \varepsilon[u_L]$, gdzie $\varepsilon[f] = df/dx$ lub $\varepsilon[f] = \dot{f}/l_L$. Amplitudy sił podłużnych wynoszą $N_L = EA_L\varepsilon[u_L]$. Równanie równowagi dynamicznej ma postać

$$\sum_{L=e+1}^{n}\int_0^{l_L} N_L \varepsilon[\overline{u}_L]dx + \sum_{K=1}^{n}\int_0^{l_K} M_K \kappa[\overline{w}_K]dx = \sum_{L=e+1}^{n}\int_0^{l_L} \theta^2 \mu_L u_L \overline{u}_L dx + \sum_{K=1}^{n}\int_0^{l_K} \theta^2 \mu_K w_K \overline{w}_K dx + \sum_{K=1}^{e} U_K \overline{u}_K + \sum_{L=e+1}^{n}\int_0^{l_K} p_L \overline{u}_L dx + \sum_{K=1}^{n}\int_0^{l_K} q_K \overline{w}_K dx \qquad (14)$$

gdzie $\overline{u}_L, \overline{w}_L, \overline{u}_K, \overline{w}_K$ przebiegają wszystkie deformacje kinematycznie dopuszczalne. Przyjmijmy te pola jako stowarzyszone z obciążeniami skupionymi w węzłach, w postaci (2) oraz

$$\overline{u}_L(\xi) = {}^*\overline{u}_L \, {}^*\vartheta(\alpha_K, \xi) + \overline{u}_L{}^* \vartheta^*(\alpha_K, \xi), \qquad (15)$$

gdzie ${}^*\vartheta(\alpha\ ,\xi) = \sin(\alpha(1-\xi))/\sin\alpha$, $\vartheta^*(\alpha\ ,\xi) = \sin(\alpha\xi)/\sin\alpha$ spełniają równanie $\ddot{f} + \alpha^2 f = 0$. Jeśli pewna funkcja f spełnia to równanie, to $\{f, g\}_L = (\dot{f}\, g)\big|_0^1$, gdzie $\{f, g\}_L$ jest formą dwuliniową:

$$\{f, g\}_L = \int_0^1 \left(\dot{f}\, \dot{g} - (\alpha_L)^2 f\, g \right) d\xi \qquad (16)$$

Siły wewnętrzne wyrażają się wzorami

$${}^*N_L = \frac{EA_L}{l_L}\{u_L, {}^*\vartheta(\alpha_L, .)\}_L , \quad N_L{}^* = \frac{EA_L}{l_L}\{u_L, \vartheta^*(\alpha_L, .)\}_L \qquad (17)$$

Podstawienie (15), (2) do (14) daje algebraiczne równanie równowagi dynamicznej

$$\sum_{L=e+1}^{n}({}^*N_L \, {}^*\overline{u}_L + N_L{}^* \overline{u}_L{}^*) + \sum_{K=1}^{n}\left({}^*M_K \, {}^*\overline{\varphi}_K + M_K{}^* \overline{\varphi}_K{}^* + {}^*T_K \, {}^*\overline{w}_K + T_K{}^* \overline{w}_K{}^*\right) - \sum_{K=1}^{e} U_K \overline{u}_K = \overline{L}_z \qquad (18)$$

gdzie $\overline{L}_z$ jest pracą wirtualna wszystkich obciążeń, por.[7]. Związki $(6)_{1,2}$ dotyczą prętów o numerach K=1,..., n ; związki $(6)_3$ dotyczą K=1,...,e oraz

$${}^*\overline{u}_L = \sum_{j=1}^{s} {}^*C_{Lj}\, \overline{q}_j \qquad \overline{u}_L{}^* = \sum_{j=1}^{s} C_{Lj}{}^*\, \overline{q}_j , \qquad L=e+1, \dots , n \qquad (19)$$

Podstawienie powyższych związków daje s równań równowagi dynamicznej

$$\sum_{L=e+1}^{n}({}^*N_L \, {}^*C_{Lj} + N_L{}^* C_{Lj}{}^*) + \sum_{K=1}^{n}\left({}^*M_K \, {}^*B_{Kj} + M_K{}^* B_{Kj}{}^* + {}^*T_K \, {}^*A_{Kj} + T_K{}^* A_{Kj}{}^*\right) - \sum_{K=1}^{e} U_K C_{Kj} = Q_j \qquad (20)$$

pomijamy tu formułę określającą zastępcze obciążenie Q_j . Podobnie jak w p.2 dowodzi się, że związki konstytutywne są jednorodne, niezależnie od postaci obciążenia $p_L(\xi)$:

$${}^*N_L = \frac{EA_L}{l_L}\left(\pi_L \, {}^*u_L + \rho_L u_L^*\right) , \quad N_L{}^* = \frac{EA_L}{l_L}\left(\rho_L \, {}^*u_L + \pi_L u_L^*\right) \qquad (21)$$

współczynniki występujące powyżej wynoszą

$$\pi_L = \left\{ {}^*\vartheta(\alpha_L,.), {}^*\vartheta(\alpha_L,.) \right\}_L , \qquad \rho_L = \left\{ {}^*\vartheta(\alpha_L,.), \vartheta^*(\alpha_L,.) \right\}_L \tag{22}$$

Z uwagi na równość: $\left\{ {}^*\vartheta(\alpha_L,.), {}^*\vartheta(\alpha_L,.) \right\}_L = \left({}^*\dot{\vartheta}\, {}^*\vartheta \right)\Big|_0^1$ jest: $\pi_L = -{}^*\dot{\vartheta}(\alpha_L, 0)$. Podobnie dowodzi się: $\rho_L = {}^*\dot{\vartheta}(\alpha_L, 1)$. Można zapisać: $\pi_L = \pi(\alpha_L)$, $\rho_L = \rho(\alpha_L)$, gdzie $\pi(\alpha) = \alpha \operatorname{ctg}\alpha$, $\rho(\alpha) = -\alpha / \sin\alpha$. Zdefiniujmy macierze diagonalne o wymiarach $(n-e)\times(n-e)$

$$\mathbf{A}_\pi = diag\left\{ \frac{EA_L}{l_L} \pi_L \right\},\ \mathbf{A}_\rho = diag\left\{ \frac{EA_L}{l_L} \rho_L \right\} \tag{23}$$

Przypomnijmy, że macierze $\mathbf{D}_\eta$, $\eta = \alpha, \beta, \vartheta, \delta, \varepsilon, \gamma$ mają jednakowe wymiary $n \times n$ a macierz $\mathbf{D}_u$ jest $e \times e$. Macierz sztywności ma rozkład: $\mathbf{K} = \mathbf{K}_\varepsilon + \mathbf{K}_\kappa + \mathbf{K}_U$, gdzie $\mathbf{K}_\kappa$ i $\mathbf{K}_U$ podano formułami (13) a macierz $\mathbf{K}_\varepsilon$ jest dana wzorem

$$\mathbf{K}_\varepsilon = {}^*\mathbf{C}^T \left(\mathbf{A}_\pi {}^*\mathbf{C} + \mathbf{A}_\rho \mathbf{C}^* \right) + \mathbf{C}^{*T} \left(\mathbf{A}_\rho {}^*\mathbf{C} + \mathbf{A}_\pi \mathbf{C}^* \right) \tag{24}$$

Zauważmy, że w MES nie ujawnia się takiego rozkładu macierzy sztywności.

W tej pracy nie podano przykładów. Osoby zainteresowane konkretnymi przykładami wraz z arkuszami obliczeniowymi w języku Maple proszone są o bezpośredni kontakt z autorem: T.Lewinski@il.pw.edu.pl .

4. Uwagi końcowe

Chłodny formalizm podanego wyprowadzenia równań drgań harmonicznych ram płaskich kontrastuje z prostotą algorytmu obliczeniowego i niezwykłą prostotą otrzymywania wyników. Łatwe jest znajdowanie częstości drgań własnych. Powyższe ujęcie zachowuje wszystkie zalety MES. W szczególności równania (iii, p.1) określają współczynniki równań (i, p.1), co jest nazywane niekiedy w mechanice budowli twierdzeniem Bleicha. Przedstawiona metoda nie jest tożsama z MES, gdyż nie narzuca się, że rozwiązanie zadania jest postaci (2), (15). Metoda ta, w przeciwieństwie do MES, jest ścisła w ramach teorii prętów. Ponadto ujęcie to nie wprowadza pojęcia macierzy sztywności elementu, dzięki czemu algorytm upraszcza się tak, że może być polecany do dydaktyki. W praktyce dydaktycznej metody przemieszczeń wprowadza się kilka schematów prętów: obustronnie utwierdzony, utwierdzony i swobodnie podparty, obustronnie swobodnie podparty oraz wspornik, co zezwala na redukcję liczby niewiadomych. Taka redukcja jest też możliwa w ujęciu tu przedstawianym, por. [7, p.25.6], co jednak komplikuje wykład. Przedstawiona metoda nie jest związana z żadnym programem komputerowym; niemniej jednak programy obliczeń symbolicznych czynią ją atrakcyjną dydaktycznie, zdejmując z użytkownik trud tworzenia równań macierzowych i wykonując do końca, analitycznie, konstrukcję macierzy sztywności.

Literatura

[1] CHMIELEWSKI, T., ZEMBATY, Z., Podstawy Dynamiki Budowli, Warszawa Arkady ,1998

[2] CHOPRA, A.K., Dynamics of Structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering., New Jersey Prentice Hall, 2001

[3] GOMULIŃSKI, A., WITKOWSKI, M., Mechanika Budowli. Kurs dla zaawansowanych. Warszawa ,Oficyna Wydawnicza PW, 1993.

[4] KĄCZKOWSKI, Z., Wiadomości Wstępne. W: Mechanika Budowli z Elementami Ujęcia Komputerowego. G.Rakowski, Red. str 16-81, Warszawa , Arkady, 1984.

[5] LANGER, J., Dynamika ustrojów prętowych. W: Ciesielski i in. Mechanika Budowli. Ujęcie Komputerowe, Tom II, str. 12-115. Warszawa , Arkady, 1992

[6] LEWIŃSKI, T., On algebraic equations of elastic trusses, frames and grillages. *J.Theoret.Appl.Mech. (Mech.Teoret.Stos.)* 2001, Vol. **39**, No 2, 307-322.

[7] LEWIŃSKI, T., Statyka, stateczność i drgania harmoniczne układów prętowych, Warszawa, 2002 (raport wewnętrzny IMKI IL PW), str.186

[8] LEWIŃSKI, T ., Równania statyki ram płaskich poddanych dużym siłom osiowym, W: B.Rymsza, V.I.Andrejev,Red. *Teoretyczne Podstawy Budownictwa.* XI Polsko-Rosyjskie Seminarium, Warszawa, 3.07.-6.07.2002, str.67-72. Izdat.Associacji Stroitelnykh Vuzov. Moskwa 2002.

[9] LEWIŃSKI, T., Przyczynek do teorii statyki ram i rusztów, *Theoretical Foundations of Civil Engineering-X.* Red. W.Szcześniak, str. 293-302, OW PW, Warszawa 2002.

[10] NOWACKI, W., Dynamika Budowli. Warszawa , Arkady, 1972.

HARMONIC VIBRATIONS OF PLANE FRAMES. A NEW APPROACH TO TEACHING

Summary

The paper is aimed at providing the teachers of *mechanics of structures* with a natural method of solving problems of linear harmonic vibrations of frames and grillages (in general – spatial frames) made of thin straight elastic bars. The derivation of the matrix equations considered here, for the static case, were published in the present author's paper [6]. The idea lay in basing the lectures on the virtual work equation and taking the test displacements as those associated with the loading concentrated in nodes. In the case of harmonic deformations a similar choice of test amplitudes of displacements can be applied thus resulting in the set of the matrix equations responsible for: equations of motion, relations between generalized internal forces and pseudo-deformations and relations between the latter and the generalized displacements. This set of equations can be easy formed and solved, almost automatically, with using any symbolic computation package. Let us note that no approximations are necessary, as holds in the FEM, where also the unknown fields are represented in an approximate form. Thus the method is simultaneously theoretically correct, comprehensible, capable of taking into account inextensibility constraints and very friendly for beginners. The method paves also the way to practical FEM-aided computations of complex structures.